ΘΕΜΑ Α

Α1 Μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον έχουμε

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Α.2 α) ΣΩΣΤΟ.

β) ΛΑΘΟΣ

γ) ΛΑΘΟΣ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΣΩΣΤΟ.

Α.3 α) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

β) $\int_\alpha^\beta \sigma \upsilon \nu x \, dx = [\eta\mu x]_\alpha^\beta = \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$.

γ) $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4 \qquad x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \cdot (x-2) = x^2 - 4$$

Για $x \neq 2$ έχουμε $x - 2 \neq 0$.

$$\frac{f(x) \cdot \cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \qquad x \neq 2.$$

Β2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2)$$

$$= 2 + 2 = 4.$$

$x^2 - 4$
$= x^2 - 2^2$
$= (x-2)(x+2)$

B.3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

οπότε $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

Από ερ. B2 $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1

Α/Α	Ηλικίες	Συχνότητα v_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i v_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
1η	[25, 35)	100	30	3000	50
2η	[35, 45)	50	40	2000	25
3η	[45, 55)	40	50	2000	20
4η	[55, 65)	10	60	600	5
Σύνολα		$v=200$	////	7600	100

Τα κέντρα της κάθε κλάσης $[\alpha, \beta)$ υπολογίζονται από τον τύπο $x_i = \frac{\alpha+\beta}{2}$ $i=1,2,3,4$

$x_1 = \frac{25+35}{2} = \frac{60}{2} = 30$ $\quad x_3 = \frac{45+55}{2} = \frac{100}{2} = 50$

$x_2 = \frac{35+45}{2} = \frac{80}{2} = 40$ $\quad x_4 = \frac{55+65}{2} = \frac{120}{2} = 60$

Η σχετική συχνότητα % $f_i\%$ είναι

$$f_i\% = \frac{v_i}{v} \cdot 100 \qquad i=1,2,3,4.$$

$$f_1\% = \frac{100}{200} \cdot 100 = 50\%.$$

$$f_2\% = \frac{50}{200} \cdot 100 = 25\%.$$

$$f_3\% = \frac{v_3}{v} \cdot 100 = \frac{40}{200} \cdot 100 = 20\%.$$

$$f_4\% = \frac{v_4}{v} \cdot 100 = \frac{10}{200} \cdot 100 = 5\%.$$

2.] Η μέση ηλικία των υπαλλήλων είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = \frac{76\cancel{0}\cancel{0}}{2\cancel{0}\cancel{0}} = 38.$$

3.] Το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών είναι οι υπάλληλοι της $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλάσης

$$f_3\% + f_4\% = 20\% + 5\% = 25\%.$$

Γ4 Από την εκφώνηση έχουμε ότι ο νέος πίνακας συχνοτήτων θα είναι

Α/Α	Ηλικίες	ν_i	x_i	$x_i\nu_i$
1η	[25, 35)	110	30	3300
2η	[35, 45)	45	40	1800
3η	[45, 55)	40	50	2000
4η	[55, 65)	5	60	300
		$\nu=200$		7400

(Τα κέντρα των κλάσεων δεν άλλαξαν)

Νέα μέση τιμή

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i}{\nu} = \frac{7400}{200} = 37.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Είναι $f'(x) = \left(e^x \cdot (x-1)\right)'$ $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (e^x)' \cdot (x-1) + e^x (x-1)'$$

$$f'(x) = e^x \cdot (x-1) + e^x \cdot 1$$

$$f'(x) = e^x \cdot (x-1) + e^x$$

Επειδή $f(x) = e^x \cdot (x-1)$ άρα

$$f'(x) = f(x) + e^x$$

Δ2 Από Δ1 είναι

$$f'(x) = e^x \cdot (x-1) + e^x$$

$$f'(x) = e^x \cdot x - \cancel{e^x} + \cancel{e^x}$$

$$f'(x) = x \cdot e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

Μηδενίζω την $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^x = 0$$

$\underline{x = 0}$ ή $e^x = 0$

Αδύνατη

Ο πίνακας προσήμων της f' είναι

	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Ε.		

Η f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με τιμή $f(0) = e^0 \cdot (0-1)$

$$f(0) = 1 \cdot (-1)$$

$$f(0) = -1.$$

Δ3 Είναι $g(x)=f(x)+e^x$

παρατηρούμε από Δ1 είναι $g(x)=f'(x)$

άρα $g(x)=x\cdot e^x$

Για το πρόσημο της g μπορώ να χρησιμοποιήσω τον πίνακα προσήμων της f'

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
			$-$	0	$+$		

Άρα

$$E=\int_{-1}^{1}|g(x)|\,dx=$$

$$=-\int_{-1}^{0}g(x)\,dx+\int_{0}^{1}g(x)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}f'(x)\,dx+\int_{0}^{1}f'(x)\,dx$$

(διότι η g είναι αρχική της f)

$$= -\left[e^{x}(x-1) \right]_{-1}^{0} + \left[e^{x}(x-1) \right]_{0}^{1}$$

$$= -\left[\overset{1}{e^{0}}(0-1) - e^{-1}(-1-1) \right] + \overset{0}{\cancel{e^{1}(1-1)}} - e^{0}(0-1)$$

$$= -\left(-1 - 2e^{-1} \right) + 1$$

$$= 1 + 2e^{-1} + 1$$

$$= 2 + 2e^{-1} = 2\left(1 + \frac{1}{e}\right).$$